Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение
«Гимназия №6»
г. Глазова Удмуртской Республики

Ившина Елена Михайловна

Подписано цифровой подписью: Ившина Елена Михайловна
Дата: 2023.09.19 12:35:00 +04'00'

**Рабочая программа**
**по элективному курсу «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ПРАКТИКУМ»**
**11А класс**

2023-2024 учебный год

Составитель: Дементьева И.С.

2023 год

# Элективный курс

## Оглавление

## Аннотация программы

Данный элективный курс посвящен ключевым вопросам алгебры – уравнениям и неравенствам и называется «Математический практикум» Предназначен для учащихся, готовящихся к задаче ЕГЭ и к поступлению в высшие учебные заведения. Призван в интенсивной форме организовать повторение основных методов решения уравнений и неравенств, а также познакомить с характером задач и уровнем требований, предъявляемых при сдаче ЕГЭ. Он содействует профессиональной ориентации учащихся в области математики и ее приложений, облегчая тем самым выбор специальности и дальнейшее совершенствование в ней.

Курс помогает сформировать умение анализировать различные задачи и ситуации; умение логически обосновывать свои суждения, конструктивно подходить к предлагаемым задачам; умение планировать свою деятельность, проверять и оценивать её результаты.

Данный элективный курс содержит необходимые теоретические сведения, примеры решения типовых уравнений и неравенств и большое количество задач для самостоятельного решения. Задачи разбиты на три уровня сложности для того, чтобы учащиеся могли оценить уровень своих знаний и степень подготовки к сдаче ЕГЭ.

Материал курса имеет большое образовательное значение, задания позволяют повысить учебную мотивацию. Особенность заключается в том, что он дает учащимся дополнительный материал. Курс является развитием ранее приобретенных программных знаний, преследует цель – создать целостное представление о решении уравнений и неравенств, значительно расширить спектр заданий, посильных для учащихся. Курс систематизирует методы решения уравнений и неравенств, начиная с самых простых, до сложных.

Актуальность курса заключена в том, что эти знания востребованы, так как они нужны при решении многих задач в курсе математики, физики и других предметов, а математика является неотъемлемой составляющей науки, цивилизации, общечеловеческой культуры, находится во взаимосвязи и взаимодействии с другими областями мировой культуры.

## Пояснительная записка

Данный курс предлагается учащимся 11 –го класса (профильный уровень). Курс рассчитан на учащихся, проявляющих интерес к математике. Содержание курса состоит из трех глав: Уравнения и неравенства, Общие методы решения уравнений и неравенств всех типов, Системы уравнений. Курс рассчитан на 34 часа, содержит две контрольные работы, две домашние контрольные работы и два творческих проекта. В программе есть список литературы для учащихся и для учителей. Разработан дидактический материал трех уровней.

При изучении данного курса учащимся раскрываются простые, но эффективные способы решения уравнений и неравенств, приёмы построения графиков функций, содержащих переменную под знаком модуля.

Цели курса:

- создание целостного представления о решении уравнений и неравенств, значительное расширение спектра заданий, посильных для учащихся.
- овладение математическими знаниями, владение научной терминологией, эффективное её использование; применение знаний в нестандартных и проблемных ситуациях.
- интеллектуальное развитие учащихся, формирование логических навыков выделения главного, сравнения, анализа, синтеза, обобщения, систематизации. Владение рациональными приёмами работы и навыками самоконтроля.
- обеспечение гарантированного качества подготовки выпускников для поступления в вуз и продолжения образования, а также к профессиональной деятельности, требующей высокой математической культуры.
- систематизация и углубление знаний, закрепление и упрочение умений, необходимых для продолжения образования в вузах с повышенными требованиями к математическому образованию выпускников средней школы.

Задачи курса:

- закрепление основных знаний об уравнениях и неравенствах, ознакомление учащихся с видами заданий повышенной сложности по данной теме в ЕГЭ.
- обучение рационально распределять время выполнения заданий ЕГЭ.
- интересующимся школьникам получить дополнительную подготовку и сдать ЕГЭ по предмету на профильном уровне.
- усвоение аппарата уравнений и неравенств, как основного средства математического моделирования прикладных задач.
- интеллектуальное развитие учащихся, формирование качеств мышления, характерных для математической деятельности.
- умение проводить логически грамотные преобразования выражений и эквивалентные преобразования алгебраических задач (уравнений, неравенств, систем, совокупностей).
- умение использовать основные методы при решении алгебраических задач с различными классами функций.
- умение понимать и правильно интерпретировать задачи с параметрами, умение применять изученные методы исследования и решения задач с параметрами: аналитический и координатный.

| Темы | |
|---|---|
| **Глава I. Уравнения и неравенства (5 ч).** | |
| 1.1. Равносильные уравнения и неравенства. Решение простейших уравнений и неравенств | 2 |
| 1.2. Метод интервалов | 3 |
| **Глава II. Общие методы решения уравнений и неравенств всех типов (рациональные, иррациональные, тригонометрические, показательные, логарифмические) (23 ч).** | |
| 2.1. Вынесение общего множителя | 2 |
| 2.2.Замена переменного | 4 |
| 2.3. Графический метод | 3 |
| 2.4. Использование ограниченности и ОДЗ функций | 3 |
| 2.5. Использование монотонности и непрерывности функций | 2 |
| 2.6. Уравнения и неравенства с модулем | 5 |
| 2.7. Иррациональные уравнения | 2 |
| 2.8. Иррациональные неравенства | 2 |
| **Глава III. Системы уравнений и неравенств (6 ч).** | |
| 3.1. Методы решения систем уравнений и неравенств | 3 |
| 3.2. Системы комбинированных уравнений и неравенств | 3 |

## Содержание программы.

### Глава I. Уравнения и неравенства.

**<u>1.1. Равносильные уравнения и неравенства. Решение простейших уравнений и неравенств (2 часа).</u>**

**Урок 1.**

Преобразования, приводящие к равносильному уравнению.

перенос членов уравнения из одной части в другую;

- прибавление к обеим частям уравнения одного и того же числа;
- умножение (деление) обеих частей уравнения на число, отличное от нуля;
- прибавление к обеим частям некоторого выражения $\varphi(x)$, примет вид $f_1(x)+\varphi(x)=g_1(x)+\varphi(x)$, такого, что его область определения содержит ОДЗ исходного уравнения;
- умножение (деление) обеих частей уравнения на некоторое выражение $\varphi(x)$ (уравнение примет вид $f_1(x)*\varphi(x)=g_1(x)*\varphi(x)$ или $\frac{f_1(x)}{\varphi(x)}=\frac{g_1(x)}{\varphi(x)}$), такое, что его область определения содержит ОДЗ исходного уравнения и на ней $\varphi(x)$ не обращается в нуль;
- возведение обеих частей уравнения в одну и ту же целую положительную степень ***n***, если они принимают значения одного знака ( $f(x)\geq 0$, $g(x)\geq 0$ для любого ***x*** из ОДЗ); в случае, когда ***n*** - нечетное число, то равносильность имеет место безоговорочно (т.е. за знаками можно не следить).

В тех случаях, когда уравнение решается с применением последних трёх преобразований без соблюдения всех оговоренных условий, может произойти потеря или приобретение лишних решений.

**Примеры преобразований, приводящих к появлению "посторонних корней" и требующих проверки в конце решения.**

- приведение подобных членов $f_1(x)+\varphi(x)=g_1(x)+\varphi(x)$, $f_1(x)=g_1(x)$;
- сокращение дроби на выражение, содержащее неизвестное;
- умножение обеих частей уравнения на выражение, содержащее неизвестное;
- возведение обеих частей уравнения в четную степень;

- при решении методом разложения левой части уравнения на множители

$$f_1(x)f_2(x)...f_m(x)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f_1(x)=0, \\ ........... \\ f_m(x)=0 \end{array}\right.$$

**Примеры преобразований, приводящих к потере корней.**

- деление на выражение, содержащее неизвестное (возможна потеря корней, при которых это выражение равно нулю);
- умножение обеих частей уравнения на множитель, содержащий неизвестное;
- извлечение квадратного корня из обеих частей уравнения;
- использование производных пропорций.

Говорят, что ***уравнение равносильно данной совокупности уравнений (неравенств) на множестве X***, если множество всех корней уравнения, принадлежащих X, совпадает с множеством всех решений совокупности уравнений (неравенств), принадлежащих X.

Решить неравенств $f(x)\geq 0$ (или $f(x)\leq 0$, или $f(x)>0$, или $f(x)<0$) это значит найти все значения аргумента функции *f*, при которых оно справедливо. Для неравенства $f(x)\geq 0\ (\leq,>,<)$ под областью допустимых значений понимают область определения функции *f*.

Для неравенства $f(x)<g(x)\ (\leq,>,\geq)$ под областью допустимых значений понимают область определения функций $f$ и $g$.

Два неравенства $f_1(x)<g_1(x)$ и $f_2(x)<g_2(x)$ называются ***равносильными на множестве X***, если множества их решений, принадлежащие X, совпадают. В этом случае пишут $f_1(x)<g_1(x)\Leftrightarrow f_2(x)<g_2(x)$. Если же все решения неравенства $f_1(x)<g_1(x)$ являются решениями неравенства $f_2(x)<g_2(x)$, то второе неравенство называют следствием первого. В этом случае пишут $f_1(x)*g_1(x)\Rightarrow f_2(x)<g_2(x)$. Если в процессе решения от исходного неравенства совершается переход к его следствию, то в конце решения необходимо пронести исследование, позволяющее из полученного множества значений аргумента отобрать те, которые являются решениями исходного.

Утверждения о равносильности неравенств:

1 $f(x)<g(x)\Leftrightarrow g(x)>f(x)$

2. $f(x)<g(x)\Leftrightarrow f(x)-g(x)<0$

3. $f(x)<g(x)\Leftrightarrow f(x)-\varphi(x)<g(x)-\varphi(x)$, если $\varphi(x)$ определена на ОДЗ исходного неравенства.

4. $f(x)<g(x)\Leftrightarrow f(x)\varphi(x)<g(x)\varphi(x)$, если $\varphi(x)$ положительна для всех $x$ из ОДЗ исходного неравенства.

$f(x)<g(x)\Leftrightarrow f(x)\varphi(x)>g(x)\varphi(x)$, если $\varphi(x)$ отрицательна для всех $x$ из ОДЗ исходного неравенства.

5. $\dfrac{f(x)}{g(x)}>0\Leftrightarrow g(x)f(x)>0$

6. $f(x) < g(x)$на Х $\Leftrightarrow (f(x))^n < (g(x))^n, (n \in N)$, если $f(x)$ и $g(x)$ положительны на Х.

7. $f(x) < g(x) \Leftrightarrow \sqrt[2n+1]{f(x)} < \sqrt[2n+1]{g(x)}, (n \in N)$

8. $(f(x))^{2n} < (g(x))^{2n}, (n \in N) \Leftrightarrow |f(x)| < |g(x)|$

Говорят, что неравенство $f(x) < g(x)$ равносильно на множестве Х совокупности систем неравенств

$$\begin{cases} f_1(x) < g_1(x) \\ \quad \dots \\ h_1(x) < \varphi_1(x) \end{cases} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \begin{cases} f_k(x) < g_k(x) \\ \quad \dots \\ h_k(x) < \varphi_k(x) \end{cases}$$

если множество решений неравенства $f(x) < g(x)$, принадлежащих Х, совпадает с множеством всех решений совокупности, принадлежащих Х.

Г.К.Муравин «Алгебра и начала анализа. 10кл» № 461, № 462.

Задачи для самостоятельного решения из дидактического материала № 2, №5, №7, №11, №13, №16, №29, №35.

**Урок 2.**

Решение задач из дидактического материала № 36, № 37, № 45, № 46, № 64, № 65, № 67, № 78, № 82, № 104, № 105, № 106, № 107.

## 1.2. Метод интервалов.

**Урок 1**.

Решение неравенств этим методом основано на следующем свойстве функций (в школьном курсе оно принимается без доказательства): если функция непрерывна в интервале ($x_1$; $x_2$) и между этими точками не имеет корней, то в интервале ($x_1$; $x_2$) функция сохраняет знак.

Метод нахождения участков знакопостоянства заключается в следующем. На числовой оси отмечают все точки, в которых функция $f(x)$ обращается в нуль либо терпит разрыв. Эти точки разбивают область определения функции на несколько промежутков, внутри каждого из которых $f(x)$ непрерывна и не обращается в нуль, а значит, сохраняет знак. Для определения знака достаточно определить знак функции в какой-либо внутренней точке рассматриваемого промежутка.

Пусть, например, требуется решить неравенство

$$(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n) > 0 \qquad (**)$$

где $x_1$, $x_2$…, $x_n$ фиксированные числа, причем $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Каждый $i$-й множитель, входящий в произведение, обладает свойством: он отрицателен слева от $x_i$ и положителен справа от этой точки. Любой $k$-й множитель ($k \le i$) при $x > x_i$ ,будет положителен. На числовую ось наносятся числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ Они разбивают ось на интервалы $(x_i; x_{i+1})$, $i$ = 1, 2,…, $n$-1. Знаки выражения $(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$ на интервалах будут такими на последнем “плюс”, на предпоследнем “минус”, на третьем от конца “плюс” и т.д. Решением неравенства (**) будет объединение всех интервалов, в которых поставлен знак “+”. В случае противоположного неравенства берутся интервалы с минусом.

Если $P(x)$-многочлен, то неравенство $P(x) > 0$ разложением $P(x)$ на линейные $x$-$x_i$ и квадратичные $x^2 + p_j x + q_j$ (не имеющие корней) множители, можно свести к неравенству (**), правда, при этом не все $x_i$ обязательно будут различными. Квадратичный множитель будет иметь знак “+”. Теперь нужно на числовую ось нанести значения корней $P(x)$ и поступать, как в предыдущем случае с учетом знаков квадратичных множителей (в отличие от предыдущего случая знаки могут не чередоваться).

Решение задач из дидактического материала №6, №14, №19, №24, №27, №30, №34.

**Урок 2.**

Решение задач из книги «Задачи по алгебре и началам анализа для 10-11классов» С.М.Саакян, М.А.Гольдман №1652, №1654, 1669, №1671, №1674, №1676.

**Урок 3.** Решение неравенств из ЕГЭ 2021г.

## Глава II. Общие методы решения уравнений и неравенств всех типов (рациональных, иррациональных, тригонометрических, показательных и логарифмических) (21 час).

### 2.1. Вынесение общего множителя (разложение на множители)(2 ч)

**Урок 1**.

Если функция $f(x)$ имеет вид $f(x) = f_1(x) f_2(x) \ldots f_m(x)$, то уравнение $f(x)=0$ можно решать так:

$$f_1(x) f_2(x) \ldots f_m(x) = 0 \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} f_1(x) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_m(x) = 0 \end{array} \right.$$

В конце необходимо сделать проверку, так как область определений отдельных уравнений может быть шире ОДЗ исходного уравнения.

Решение задач из дидактического материала №12, №15, №37, №40, №42, №69, № 76, № 88

**Урок 2.**

Решение задач из книги «Задачи по алгебре и началам анализа для 10-11классов» С.М.Саакян, М.А.Гольдман № 360, № 396, № 1018, № 1023, № 1650.

## 2.2. Замена переменного (4 ч).

**Урок 1.**

В тех случаях, когда исходное уравнение может быть приведено к виду $f(g(x)) = 0$, то заменой $t = g(x)$ уравнение сводится к решению уравнения $f(t) = 0$. Далее для каждого полученного корня $\boldsymbol{t_k}$ решается уравнение $g(x) = \boldsymbol{t_k}$

Метод замены переменного в неравенствах. В случаях, если неравенство может быть сведено к неравенству вида $f(g(x)) > 0$, то заменой $t = g(x)$ оно сводится к неравенству $f(t) > 0$ которое, возможно, решается проще. По полученным значениям $t$ дальше определяется множество значений $x$, удовлетворяющих неравенству.

Решение задач из дидактического материала №39, №70, №72, №75, №89, №96, №127, №147, №154, №158.

**Урок 2.**

Решение задач из книги «Задачи по алгебре и началам анализа для 10-11классов» С.М.Саакян, М.А.Гольдман №377, №390, №1561, №1647, №1661, №1672.

**Урок 3.**

Решение задач с параметром из задачника Гинев Ю.Н. «Математика» подготовительный факультет МИСиС № 6.4.18, № 6.4.19, № 6.4.20, №6.4.21, №6.4.24.

**Урок 4.**

Решение задач из задачника Гинев Ю.Н. «Математика» подготовительный факультет МИСиС № 6.4.35, № 6.4.37, № 2.4.11.

## 2.3. Графический метод (3 ч).

**Урок 1.**

Графический метод. Иногда полезно рассмотреть эскизы графиков $f(x)$ и $g(x)$ входящих в уравнение $f(x) = g(x)$. Это может помочь выяснить: а) на какие множества надо разбить числовую ось, чтобы на каждом из этих множеств использовать свой способ решения, б) наличие или отсутствие корней, их количество.

Графический метод. Это метод используется в тех случаях, когда неравенство допускает простую геометрическую интерпретацию, т.е. можно достаточно просто построить графики функций левой и правой частей неравенства $f(x) < g(x)$. Тогда решением неравенства будет множество значений аргумента $x$, для которых точка графика функции g(x) будет находиться выше соответствующей точки графика $f(x)$.

Решение задач из дидактического материала №52, №90, №97.

**Урок 2.**

Решение задач из дидактического материала №137, №135, №145.

Решение задач из пособия «Задачи с параметрами» В.В.Локоть.

**Урок 3.**

Творческий проект “Решение уравнений и неравенств графическим методом”

## 2.4. Использование ограниченности и ОДЗ функций (3 ч).

**Урок 1.**

Использование ОДЗ. В начале решения уравнения всегда проверяют, что из себя представляет область определения входящих в уравнение функций. Иногда ОДЗ состоит из нескольких точек и остается только проверить, какие из них удовлетворяют уравнению. В случае, если ОДЗ - пустое множество, то уравнение не имеет решений. Если же ОДЗ вычисляется достаточно трудно, то следует попробовать другой метод.

Использование ограниченности функций. Иногда уравнение $f(x) = g(x)$ устроено так, что на всей ОДЗ $f(x) \geq A$, а $g(x) \leq A$ при некотором А. Решение уравнения сводится тогда к нахождению тех значений $x$, для которых одновременно f(x) = A и g(x) =A. Если же хотя бы одно из неравенств строгое, то уравнение не имеет решений.

**Пример 1.** ***Решить уравнение*** $\sqrt{x+2}+\sqrt[4]{x^4+1}=2-x^2$

Решение (использование ограниченности выражений, входящих в уравнение). Так как $\sqrt{x+2} \geq 1$ и $\sqrt[4]{x^4+1} \geq 1$ для $x \in R$, то левая часть уравнения не меньше двух для $x \in R$, а правая часть $2-x^2 \leq 2$ для всех $x \in R$ . Поэтому уравнение может иметь корнями только те значения $x$, при которых

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+1}+\sqrt[4]{x^4+1}=2 \\ 2-x^2=2 \end{cases}$$

Решая второе уравнение системы, найдем $x = 0$. Это значение удовлетворяет и первому уравнению системы. Итак, $x = 0$ - корень уравнения.

Ответ: 0.

**Пример 2.** ***Решить уравнение*** $3\sqrt{3x+1}-4\sqrt[3]{x+7}-\sqrt{x-1}=-(2+\sqrt{1-x})$

Решение Нетрудно заметить, что ОДЗ уравнения состоит из одной точки $x = 1$. Проверкой убеждаемся, что $x = 1$ - решение уравнения.

Ответ: 1.

Решение задач из задачника “Тематические тесты. Математика ЕГЭ 2021г.” под редакцией Ф.Ф.Лысенко стр.233 В5(№4), В9(№3)

**Урок 2.**

Решение задач из задачника “ЕГЭ Математика 2021г.” Л.О.Денищева.

**Урок 3.**

Решение задач из Приложения №1.

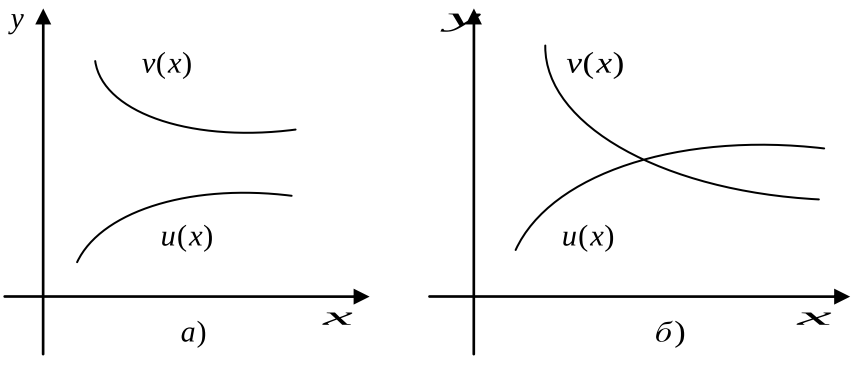
## 2.5. Использование монотонности и непрерывности функций (2 ч).

**Урок 1.**

Использование монотонности функций. Если на некотором промежутке $(a;b)$ функции, входящие в уравнение $f(x)=g(x)$ таковы, что $f(x)$ непрерывна и строго возрастает, а $g(x)$ непрерывна и строго убывает, то равенство $f(x) = g(x)$ возможно только в одной точке. Иногда это значение можно угадать.

**Пример 1.** ***Решить уравнение*** $\sqrt[5]{x-1}+\sqrt{x+2}=\sqrt[3]{29-x}$

Решение (использование монотонности функций). Если, функция $u(x)$ монотонная, то уравнение $u(x)=A$ либо не имеет решений, либо имеет единственное решение. Отсюда следует, что уравнение $u(x)=v(x)$, где $u(x)$-возрастающая, а $v(x)$-убывающая функции, либо не имеет решений (рис. а), либо имеет единственное решение (рис. б).




В нашем случае функции $f=\sqrt[5]{x-2}$ и $g=\sqrt{x-2}$, а значит и их сумма, возрастают на области определения уравнения. Функция $\varphi=\sqrt[3]{29-x}$ бывает на ОДЗ уравнения. Подбором находим, что $f(2)+g(2)=1+2=\varphi(2)$. Итак, уравнение имеет решение $x = 2$ и он единственно.

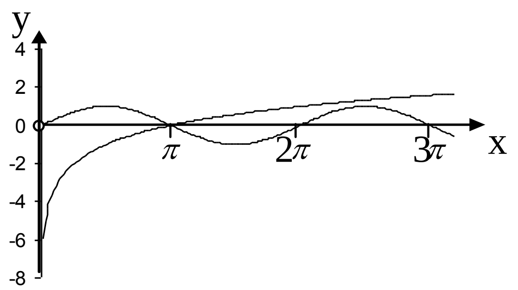
Ответ: 2.

**Пример 2.** ***Решить уравнение:*** $\log_2(4-x)=x-3$.

Решение:

О.Д.З.: $x \in (-\infty;4)$.
Пусть $f(x) = \log_2(4-x), g(x) = x-3$.
$f^1(x) = (\log_2(4-x))^1 = \dfrac{-1}{(4-x)*\ln 2} \div f^1(x) < 0$ при $x < 4$, следовательно
$y = f(x)$ - убывает на $(-\infty;4)$.
$g(x)$возрастает на R, следовательно, на $(-\infty;4)$ также возрастает.
Уравнение может иметь один корень. Подбором находим x = 3.
Действительно, $\log_2(4-3) = 3-3$- верное равенство.
Ответ: 3.

**Пример 3.** ***Решить уравнение:*** $\log_\pi x = 1 + \sin x * \log_\pi 2$.
Решение:
О.Д.З.: $x > 0$
$\dfrac{\log_\pi x}{\log_\pi 2} = \dfrac{1}{\log_\pi 2} + \sin x;$
$\log_2 x = \log_2 \pi + \sin x;$
$\log_2 x - \log_2 \pi = \sin x;$
$\log_2 \dfrac{x}{\pi} = \sin x.$
Полученное уравнение легко решается графически (см. рис. 1).




Ответ: π.

При решении уравнения $\log_2 \dfrac{x}{\pi} = \sin x$ аналитически, рассматриваем следующие промежутки:

1) Если $x > 2\pi$, то $\log_2 \dfrac{x}{\pi} > 1$, но $|\sin x| \le 1$, следовательно на $(2\pi;+\infty)$ корней нет.

2) Если $0 < x < \pi$, то $0 < \dfrac{x}{\pi} < 1$,

$\log_2 \dfrac{x}{\pi} < 0$, но $\sin x > 0$ на $(0;\pi)$, следовательно на $(0;\pi)$ корней нет.

3) Если $\pi < x \le 2\pi$, то $1 < \dfrac{x}{\pi} \le 2$,

$0 < \log_2 \dfrac{x}{\pi} \le 1$, но $\sin x < 0$ на $(\pi; 2\pi]$, следовательно, на $(\pi; 2\pi]$ корней нет.

4) Если $x = \pi$, то уравнение обращается в верное числовое равенство.

Ответ: $\pi$.

**Урок 2.**

Решение задач из учебника Муравин Г.К. «Алгебра и начала анализа 10кл».

Решение задач из дидактического материала №52, №57.

## <u>2.6. Уравнения и неравенства с модулем (5 ч).</u>

**Урок 1.**

Уравнения вида $f(|x|) = g(x)$. Решение уравнения $f(|x|) = g(x)$ сводится к решению совокупности двух систем:

$$f(|x|) = g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) = g(x) \\ x \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(-x) = g(x) \\ x < 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Уравнения вида $|f(x)| = g(x)$. Решение уравнения $|f(x)| = g(x)$ сводится к решению совокупности двух систем:

$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} -f(x) = g(x) \\ f(x) < 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

или $$f(|x|) = g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} -f(x) = g(x) \\ g(x) \ge 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Можно решать любым из двух приведенных способов.

Примечание. Последнюю совокупность можно заменить системой

$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right. \\ g(x) \ge 0 \end{cases}$$

В уравнениях вида $|f(x)| = |g(x)|$ удобно перейти к равносильному уравнению $(f(x))^2 = (g(x))^2$, которое решается следующим образом:

$$(f(x))^2-(g(x))^2=(f(x)-g(x))(f(x)+g(x))=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)-g(x)=0 \\ f(x)+g(x)=0 \end{array}\right.$$

Для решения уравнений вида

$$|f_1(x)|+\ldots+|f_k(x)|-|f_{k+1}(x)|-\ldots-|f_n(x)|=g(x)$$

применяют ***метод промежутков***. Для этого находят ОДЗ равенства, определяют точки, в которых функции $f_1(x),\ldots,f_n(x)$ неопределенны, и находят корни совокупности уравнений: $\left[\begin{array}{l} f_1(x)=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x)=0 \end{array}\right.$

В каждом из промежутков, на которые найденные точки разбивают ОДЗ, функции, стоящие под знаком модуля, имеют постоянный знак. Поэтому исходное уравнение на каждом промежутке заменяется на уравнение, не содержащее знаков абсолютной величины и равносильное исходному.

При решении уравнения, в котором под знаком модуля находятся выражения, содержащие модуль, часто бывает полезно сначала освободиться от внутренних модулей, а затем в полученных уравнениях раскрывать оставшиеся модули.

**Пример 1.** ***Решить уравнение*** $|x^2-x-8|=-x$

Решение. Решим данное уравнение используя схему:

$$|x^2-x-8|=-x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2-x-8=-x \\ -x\ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} -(x^2-x-8)=-x \\ -x\ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2=8 \\ -x\ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2-2x-8=0 \\ -x\ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2\sqrt{2} \\ x=2 \end{array}\right.$$

Ответ: $-2\sqrt{2}$, 2

**Пример 2.** ***Решить уравнение*** $|3x-4|=4x^2+3x-2$

Решение. Для решения уравнения воспользуемся схемой :

$$|3x-4|=4x^2+3x-2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3x-4=4x^2+3x-2 \\ 3x-4\ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 3x-4=-(4x^2+3x-2) \\ 3x-4\ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x^2+1=0 \\ x\ge 4/3 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x^2+3x-3=0 \\ x<4/3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{33}}{4}$$

Ответ: $\frac{-3\pm\sqrt{33}}{4}$

**Пример 3.** ***Решить уравнение*** $|x+4|+|x-4|=x+7$

Решение. Данное уравнение эквивалентно совокупности уравнений:

1) $-x-4-x+4=x+7$, при $x<-4$
2) $x+4-x+4=x+7$, при $-4\le x<4$
3) $x+4+x-4=x+7$, при $x\ge 4$

Корень первого уравнения, равный $-\frac{7}{3}$, не принадлежит промежутку $(-\infty;-4)$ и, поэтому не является решением исходного уравнения. Корнем второго уравнения является $x$=1; третьего –$x$=7

Ответ: 1; 7

**Пример 4.** ***Решить уравнение*** $\left|x^3-\frac{5x}{2}-2\right|=\left|x^3+x^2+\frac{3x}{2}+2\right|$

Решение. Исходное уравнение равносильно уравнению

$$\left(x^3-\frac{5x}{2}-2\right)^2-\left(x^3+x^2+\frac{3x}{2}+2\right)^2=0$$

Раскладывая левую часть равенства на множители по формуле разности квадратов, и приводя подобные члены, получим уравнение

$-2x(x+2)^2(x+1)(x-0{,}5)=0$ Отсюда корни уравнения, $x_1$=0, $x_2$=-2, $x_3$=-1, $x_4$=0,5

Ответ: -2; -1; 0; 0,5

**Пример 5.** ***Решить уравнение*** $|x+4|+|x-4|=\frac{2}{x^3}$

Решение. Левая часть уравнения после раскрытия модулей будет иметь вид: $|x+4|+|x-4|=\begin{cases}-x-4-x+4, x\le -4\\ x+4-x+4, -4\le x\le 4\\ x+4+x-4, x\ge 4\end{cases}=\begin{cases}-2x, x\le -4\\ 8, -4\le x\le 4\\ 2x, x\ge 4\end{cases}$

При $\boldsymbol{x}$<0 правая часть уравнения отрицательна, а левая положительна; $\frac{2}{x^3}\le\frac{2}{64}<4$ при $x\ge 4$, а $|x+4|+|x-4|\ge 8$. Это означает, что на этих промежутках уравнение не будет иметь решений. При $4\ge x>0$ правая часть уравнения $\frac{2}{x^3}$ убывающая функция, а левая часть $|x+4|+|x-4|$ равна 8. Следовательно, исходное уравнение будет иметь единственное решение, которое определяется из условия $\frac{2}{x^3}=8$. Получаем ответ $x=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$.

Ответ: $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$

**Урок 2.**

Для решений неравенств вида:

$|f_1(x)|+\ldots+|f_k(x)|-|f_{k+1}(x)|-\ldots-|f_n(x)|>g(x)$ (**)

применяют метод промежутков. Для этого находят ОДЗ неравенства (**), определяют точки, в которых функции $f_1(x),\ldots,f_n(x)$ не определены, и находят корни совокупности уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} f_1(x)=0 \\ \quad\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x)=0 \end{array}\right.$$

В каждом из промежутков, на которые найденные точки разбивают ОДЗ, значения функций, стоящих под знаком модуля, имеют постоянный знак. Поэтому неравенство (**) на каждом промежутке заменяется равносильным неравенством, не содержащим знаков абсолютной величины.

При решении неравенств более простого вида можно пользоваться схемами:

$$|f(x)|>g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)>g(x) \\ f(x)<-g(x) \end{array}\right.$$

$$|f(x)|<g(x) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} f(x)<g(x) \\ f(x)>-g(x) \end{array}\right.$$

В неравенствах вида $|f(x)|<|g(x)|$ удобно перейти к равносильному неравенству $(f(x))^2<(g(x))^2$, которое решается следующим образом:

$$(f(x))^2<(g(x))^2<0 \Leftrightarrow (f(x)-g(x))(f(x)+g(x))<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} f(x)-g(x)<0 \\ f(x)+g(x)>0 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} f(x)-g(x)>0 \\ f(x)+g(x)<0 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

**Пример 1.** ***Решить неравенство:***

$$\frac{1-|x^2-3|}{|2x^2-x|-1} \le 0$$

Решение: Рассмотрим функцию

$$f(x)=\frac{1-|x^2-3|}{|x^2-x|-1}$$

Найдем нули функции: $x_4=-\sqrt{2}$

откуда $x_4=-\sqrt{2}$ $x_4=-\sqrt{2}$ $x_4=-\sqrt{2}$ $x_4=-\sqrt{2}$

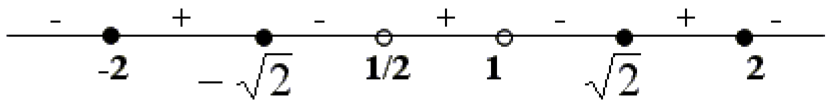
Далее находим точки разрыва;

$$|2x^2-x|=1$$

Откуда

$$x_5=-\frac{1}{2}, x_6=1$$

Нанесем точки разрыва и нули функции на числовую прямую, которые разобьют ее на семь промежутков, в каждом из которых функция сохраняет постоянный знак.




**Ответ:**

$$\left(-\infty;-2\,\right]\cup\left[-\sqrt{2};-\frac{1}{2}\,\right)\cup\left(1;\sqrt{2}\,\right]\cup\left[2;\infty\,\right).$$

**Пример 2.** ***Решить неравенство*** $|\sin x| > |\cos x|$.

Решение: Данное неравенство равносильно неравенству

$\sin^2 x > \cos^2 x$ или $\cos 2x < 0$,

откуда $\frac{\pi}{2} + 2\pi n < 2x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z.$

Итак, $\frac{\pi}{4} + \pi n < x < \frac{3\pi}{4} + \pi n, n \in Z$ решение данного неравенства.

**Пример 3.** ***Решить неравенство*** $|x+2| \geq \frac{1}{x-1}$

Решение. Если ***x < 1***, то неравенство выполнено (левая часть неотрицательна, а правая отрицательна). Если же ***x>1*** (а, значит, ***x+2>0***), то $(-\infty;\ 2) \cup \left(\frac{1}{4}\left(\sqrt{17}+5\right); +\infty\right).$

Отсюда $(-\infty;\ 2) \cup \left(\frac{1}{4}\left(\sqrt{17}+5\right); +\infty\right).$ так как ***x > 1.***

**Ответ:** $(-\infty;\ 2) \cup \left(\frac{1}{4}\left(\sqrt{17}+5\right); +\infty\right).$

*Комментарий.* Выгоднее рассматривать знаки правой части, а не раскрывать модуль по схеме ***x < –2; x > –2***.

**Пример 4.*****Решить неравенство*** $\log_{|x+1|} 2 > \log_{|x-1|} 2$

Решение.

$|x+1| > 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty;-2) \cup (0;+\infty)$

$|x-1| > 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty;0) \cup (2;+\infty)$

заметим, что $\log_2|x+1| > 0$ и $\log_2|x-1| > 0$ одновременно на множестве $x \in (-\infty;-2) \cup (2;+\infty)$, а на множестве $x \in (-2;-1) \cup (-1;0) \cup (0;1) \cup (1;2)$ эти логарифмы имеют разные знаки.

Поэтому для неравенства

$$\log_{|x+1|} 2 > \log_{|x-1|} 2 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_2|x+1|} > \frac{1}{\log_2|x-1|}$$

рассмотрим два случая.

1) $x \in (-\infty;-2) \cup (2;+\infty)$ тогда

$\log_2|x-1| > \log_2|x+1| \Leftrightarrow |x-1| > |x+1| \Leftrightarrow$

$(x-1)^2 > (x+1)^2 \Leftrightarrow x < 0$

откуда получаем для ответа $x \in (-\infty;-2)$

2) $x \in (-2;2), x \neq 0, x \neq \pm 1$ Тогда, домножая обе части неравенства на $\log_2|x+1|\log_2|x-1| < 0$, имеем

$\log_2|x-1| < \log_2|x+1| \Leftrightarrow |x-1| < |x+1| \Leftrightarrow$

$(x-1)^2 < (x+1)^2 \Leftrightarrow x > 0$

В этом случае решениями являются $x \in (0;2), x \neq 1$.

**Ответ:** $x \in (-\infty;-2) \cup (0;1) \cup (1;2)$

$$|x^2 - 3x + 2| + |2x + 1| \le 5.$$

**Пример 5**. ***Решить неравенство***

Решение. Перейдем к равносильной совокупности

$$|x^2 - 3x + 2| + |2x + 1| \le 5 \Leftrightarrow |x^2 - 3x + 2| \le 5 - |2x + 1| \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 2 \le 5 - |2x+1|, \\ x^2 - 3x + 2 \ge |2x+1| - 5; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |2x+1| \le -x^2 + 3x + 3, \\ |2x+1| \le x^2 - 3x + 7; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 2x + 1 \le -x^2 + 3x + 3, \\ 2x + 1 \ge x^2 - 3x - 3; \end{cases} \\ \begin{cases} 2x + 1 \le x^2 - 3x + 7, \\ 2x + 1 \ge -x^2 + 3x - 7; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x^2 - x - 2 \le 0, \\ x^2 - 5x - 4 \le 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - 5x + 6 \ge 0, \\ x^2 - x + 8 \ge 0; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} -1 \le x \le 2, \\ \dfrac{5 - \sqrt{41}}{2} \le x \le \dfrac{5 + \sqrt{41}}{2}; \end{cases} \\ \begin{cases} x \le 2 \text{ или } x \ge 3, \\ x \text{ — любое}; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{5 - \sqrt{41}}{2} \le x \le 2, \\ x \le 2 \text{ или } x \ge 3; \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5 - \sqrt{41}}{2} \le x \le 2.$$

$$\frac{5 - \sqrt{41}}{2} \le x \le 2.$$

Ответ:

Решение задач из дидактического материала № 92, №93, №119, №121, №129.

**Урок 3.**

Решение задач из дидактического материала №98, №124, №162.

Решение задач из задачника Гинев Ю.Н. «Математика» подготовительный факультет МИСиС № 1.3.15, №1.3.16, №6.3.33, №6.4.13.

**Урок 4.**

Решение задач из задачника Гинев Ю.Н. «Математика» подготовительный факультет МИСиС № 1.3.23, №1.4.1, №1.4.2, №1.4.3, №1.4.9.

**Урок 5.**

Решение задач из задачника Гинев Ю.Н. «Математика» подготовительный факультет МИСиС № 6.4.20, №6.4.23, №6.4.27.

## <u>2.7. Иррациональные неравенства (2 ч).</u>

**Урок 1.**

***Иррациональным*** называется неравенство, содержащее неизвестную величину под знаком радикала.

При решении иррациональных неравенств обычно приходится возводить в натуральную степень обе его части. При этом:

- если обе части неравенства возводятся в нечётную степень, то получится неравенство равносильное данному;
- если обе части неравенства возводятся в чётную степень, то получится неравенство равносильное данному лишь на множестве, на котором обе части определены и неотрицательны.

Полезно запомнить следующие схемы

$$\sqrt{f(x)} \ge g(x) \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \ge 0 \\ f(x) \ge g^2(x) \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \ge 0 \end{cases} \end{array} \right., \text{ и } \sqrt{f(x)} \le g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \ge 0 \\ f(x) \ge 0 \\ f(x) \le g^2(x) \end{cases}$$

Аналогичные схемы справедливы для строгих неравенств.

Если в неравенстве $f(x) \ge g(x)$ на некотором множестве $E$ функция $f(x) \ge 0$, а функция $g(x) \le 0$, то неравенство верно для всех $x \in E$. К сожалению, об этом часто забывают.

Особое внимание следует обратить на решение нестрогих неравенств вида $f(x)\sqrt{g(x)} \ge 0$.

Если строгое неравенство $f(x)\sqrt{g(x)} > 0$ равносильно системе $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$,

то нестрогое неравенство $f(x)\sqrt{g(x)} \ge 0$ равносильно совокупности $\left[ \begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge 0 \\ g(x) \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) = 0 \\ f(x) \le 0 \end{cases} \end{array} \right.$

Можно также заменять нестрогое неравенство $f(x)\sqrt{g(x)} \ge 0$ совокупностью $\left[\begin{array}{l} f(x)\sqrt{g(x)} > 0 \\ f(x)\sqrt{g(x)} = 0 \end{array}\right.$

Наконец подчеркнем, что при решении иррациональных неравенств переход к неравенствам-следствиям как правило не ведёт к правильному решению, так как если неравенство-следствие имеет бесконечное множество решений, то проверить наличие в полученном множестве посторонних решений практически невозможно.

**Пример 1.** ***Решить неравенство*** $\sqrt{5-x^2} > x-1$

Решение. 1 способ (переход к равносильной совокупности систем неравенств). Имеем

$$\sqrt{5-x^2} > x-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-1 \ge 0 \\ 5-x^2 > (x-1)^2 \end{cases} \\ \begin{cases} x-1 < 0 \\ 5-x^2 \ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 1 \\ 2x^2-2x-4 < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 1 \\ -\sqrt{5} \le x < 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

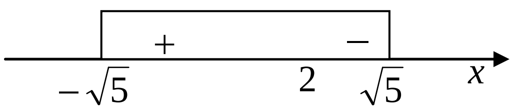
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 1 \\ x \in (-1;2) \end{cases} \\ -\sqrt{5} \le x < 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow -\sqrt{5} \le x < 2$$

2 способ (метод интервалов). Введём функцию $f(x) = \sqrt{5-x^2} - (x-1)$ и найдем значения *x*, для которых $f(x) > 0$.

Функция *f* определена, если $5-x^2 \ge 0$. Отсюда $D(f) = [-\sqrt{5};\sqrt{5}]$. Теперь решим уравнение $f(x) = 0$, то есть

$$\sqrt{5-x^2} - (x-1) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{5-x^2} = x-1 \Rightarrow 5-x^2 = x^2-2x+1$$

Корни полученного квадратного уравнения $x_1$, = -1, $x_2$ = 2. Проверкой убеждаемся, что $x_2$ = 2 является корнем исходного уравнения, а $x_1$, = -1 не является. Итак $f(x) = 0$ при *x* = 2. Отметим на числовой оси область определения функции *f* и ее нуль.




Так как функция *f* непрерывна на *D* (*f*), то она сохраняет знак в каждом из промежутков: $[-\sqrt{5};2)$ и $(2;\sqrt{5}]$ (точки $\pm\sqrt{5}$ включаются в промежутки сохранения знака, так как они не являются нулями функции). Далее определяем знак функции *f* в каждом из промежутков по её знаку в какой-либо точке промежутка. Имеем: *f*(0) = 1, значит *f* > 0 на $[-\sqrt{5};2)$; $f(\sqrt{5}) = -\sqrt{5}+1 < 0$ и *f* < 0 на $(2;\sqrt{5}]$. Таким образом, получаем ответ: $-\sqrt{5} \le x < 2$.

Замечание. Как видно из предыдущего примера, метод интервалов эффективен и при решении иррациональных неравенств. Но по сравнению с рациональными неравенствами технически сложнее определять знак функции в отдельных точках.

**Пример 2.** ***Решить неравенство*** $(x^2-9)\sqrt{x+2}\ge 0$

Решение. 1 способ (переход к равносильной совокупности систем неравенств). Выражение $\sqrt{x+2}$ всегда неотрицательно. Если $\sqrt{x+2}>0$, то первый сомножитель должен быть неотрицательным. Если $\sqrt{x+2}=0$, то произведение будет равно нулю независимо от знака выражения $(x^2-9)$ (которое определено для всех $x$). Итак, получаем

$$(x^2-9)\sqrt{x+2}\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+2>0\\ x^2-9\ge 0\end{cases}\\ x+2=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>-2\\ \left[\begin{array}{l}x\le -3\\ x\ge 3\end{array}\right.\end{cases}\\ x=-2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\ge 3\\ x=-2\end{array}\right.$$

Ответ: $\{-2\}\cup[3,+\infty)$

2 способ (метод интервалов). Рассмотрим функцию $f(x)=(x^2-9)\sqrt{x+2}$ и найдём множество значений х, при которых $f(x)\ge 0$. Найдём $D(f)$. Арифметический квадратный корень определён па множестве неотрицательных чисел, следовательно, $x+2\ge, x\ge -2$. Далее решаем уравнение $f(x)$ = 0, то есть $(x^2-9)\sqrt{x+2}=0$.

Произведение двух множителей равно нулю, если хотя бы один из них равен нулю, а другой при этом не теряет смысла. Следовательно, нулями функции $f(x)$ являются числа 3 и -2. При $x$ = -3 выражение $\sqrt{x+2}$ теряет смысл. Поэтому $x$ = -3 не является нулем $f(x)$. Точка $x$ разбивает промежуток $[-2;+\infty)$на два промежутка, в каждом из которых функция сохраняет постоянный знак, так как она непрерывна на $D(f)$.

Если $x$ > 3, то $f(x)$>0. Если -2 <$x$< 3, то $f(x)$<0. Следовательно, $f(x)\ge 0$ при $x\ge 3$ и $x$ = -2.

Ответ: $\{-2\}\cup[3,+\infty)$

**Пример 3.** ***Решить неравенство*** $\frac{x}{2-x}-\frac{3}{4}\sqrt{\frac{x}{2-x}}\le\frac{1}{4}$

Решение. Сделаем замену $y=\sqrt{\frac{x}{2-x}}, y\ge 0$. Получим неравенство $y^2-\frac{3}{4}y-\frac{1}{4}\le 0$, решение которого является промежуток $\left[-\frac{1}{4};1\right]$, где числа

$y_1 = -\frac{1}{4}, y_2 = 1$ корни уравнения $y^2 - \frac{3}{4}y - \frac{1}{4} = 0$. С учетом условия $y \geq 0$ для переменной *x* получим $0 \leq \sqrt{\frac{x}{2-x}} \leq 1$

Левое неравенство верно для любых *x*, для которых $\sqrt{\frac{x}{2-x}} \geq 0$. Решим правое: $\sqrt{\frac{x}{2-x}} \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2-x} \geq 0 \\ \frac{x}{2-x} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x < 2 \\ \left[ \begin{array}{l} x \leq 1 \\ x > 2 \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1.$

Ответ: [0;1].

Замечание. При решении данного неравенства и аналогичных ему методом замены достаточно распространённой является следующая ошибка. После нахождения корней $y_1$ и $y_2$ квадратного уравнения сразу же переходят к решению уравнений $\sqrt{\frac{x}{2-x}} = -\frac{1}{4}$ и $\sqrt{\frac{x}{2-x}} = 1$. Поскольку первое решений не имеет, а второе имеет единственное решение *x* = 1, то отсюда делают неправильные выводы типа: неравенство решений не имеет, решением является *x* = 1 и тому подобное. Поэтому при решении неравенств методом замены переменной необходимо сначала четко выписать множество решений неравенства, полученного после замены, а лишь затем переходить к старой переменной.

**Пример 4.** ***Решить неравенство*** $4^{\sqrt{x}} - 2^{\sqrt{x}+1} < 2^{\sqrt{x}+4} - 32$

Решение.

$4^{\sqrt{x}} - 2^{\sqrt{x}+1} < 2^{\sqrt{x}+4} - 32$, ОДЗ: $x > 0$

$2^{2\sqrt{x}} - 2^{\sqrt{x}} \times 2 < 2^{\sqrt{x}} \times 2^4 - 2^5$, выполним группировку слагаемых

$2^{\sqrt{x}}(2^{\sqrt{x}} - 2) - 2^4(2^{\sqrt{x}} - 2) < 0$,

$(2^{\sqrt{x}} - 2) \times (2^{\sqrt{x}} - 2^4) < 0$, учитывая правило знаков и ОДЗ данное неравенство равносильно 2-м системам:

$\begin{cases} 2^{\sqrt{x}} - 2 < 0, \\ 2^{\sqrt{x}} - 2^4 > 0; \end{cases}$ или $\begin{cases} 2^{\sqrt{x}} - 2 > 0, \\ 2^{\sqrt{x}} - 2^4 < 0; \end{cases}$

$\begin{cases} 2^{\sqrt{x}} < 2, \\ 2^{\sqrt{x}} > 2^4; \end{cases}$ т.к. $y = 2^t \uparrow$, то $\begin{cases} 2^{\sqrt{x}} > 2, \\ 2^{\sqrt{x}} < 2^4; \end{cases}$ т.к. $y = 2^t \uparrow$, то

$$\begin{cases}\sqrt{x}<1,\\ \sqrt{x}>4,\\ x>0;\end{cases} \qquad \begin{cases}\sqrt{x}>1,\\ \sqrt{x}<4,\\ x>0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x<1,\\ x>16.\end{cases} \qquad \begin{cases}x>1,\\ x<16.\end{cases}$$

$\varnothing$

Ответ: x$\in(1;16)$.

**Пример 5.** ***Решить неравенство*** $\log_2\dfrac{(\sqrt{4x+1})^2+15}{x^2+2}+\log_{1/2}\dfrac{28}{x+5}>0$

Решение.

$\log_2\dfrac{(\sqrt{4x+1})^2+15}{x^2+2}+\log_{1/2}\dfrac{28}{x+5}>0,$ уч. ОДЗ данное нер-во равносильно системе нер-ств

$$\begin{cases}4x+1\geq 0,\\ \log_2\dfrac{4(x+4)}{x^2+2}+\log_2\dfrac{x+5}{28}>0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}4x+1\geq 0,\\ \log_2\left(\dfrac{4(x+4)(x+5)}{28(x^2+2)}\right)>\log_2 1;\_\grave{o}\,.\hat{e}.\_\ y=\log_2 t\uparrow,\_\grave{o}\ \hat{\imath}\end{cases}$$

$$\begin{cases}4x+1\geq 0,\\ \dfrac{(x+4)(x+5)}{7(x^2+2)}>1;\end{cases}$$

$$\begin{cases}4x+1\geq 0,\\ 2x^2-3x-2<0;\end{cases} \qquad \begin{aligned}&2x^2-3x-2<0,\\ &f(x)=2x^2-3x-2\end{aligned}$$

$$\begin{cases}x\geq -1/4,\\ x\in(-1/2;2).\end{cases} \qquad \begin{aligned}&\hat{I}\ \ddot{A}\c{C}: x\in R\\ &\acute{I}\ \acute{o}\ddot{e}\grave{e}\ \_\hat{o}\ -\ddot{o}\grave{e}: x_1=-1/2;\ x_2=2\end{aligned}$$

Ответ: $x\in\left[-1/4;2\right).$

Решение задач из задачника Гинев Ю.Н. «Математика» подготовительный факультет МИСиС № 2.3.27, №2.3.26.

**Урок 2.**

Решение задач из задачника Гинев Ю.Н. «Математика» подготовительный факультет МИСиС № 6.3.29, №6.3.34, №6.3.35, №6.4.14, №6.4.15.

## Глава III. Системы уравнений и неравенств (5 ч).

### 3.1. Методы решения систем уравнений и неравенств (1 ч).

**Урок 1.**

Решение задач из дидактического материала №38, №47, №53, №55, №62, №86.

### 3.2. Системы комбинированных уравнений и неравенств (4 ч).

**Урок 1.**

тестирования все чаще предлагаются уравнения с разными функциями: степенными, показательными, логарифмическими, тригонометрическими, так называемые комбинированные уравнения.

Учащиеся, владеющие только стандартными методами решения уравнений, как правило, попадают в расставляемые экзаменаторами ловушки. “Берясь” за решение уравнения, они концентрируют свое внимание только на поиске преобразований, сводящих исходное уравнение к более простому, забывая при этом, что упрощение полезно и возможно не всегда.

Далее речь пойдет о наиболее общих методах, используемых при решении комбинированных уравнений.

**Метод разложения на множители. Метод введения новой переменной.**

Сначала рассмотрим несколько несложных уравнений, иллюстрирующих наиболее распространенную схему решения.

**Пример 1.** ***Решить уравнение:***

$$\log_{0,4}(0,25-x^2) = -\sin \pi x \cdot \frac{1}{\log_{0,25-x^2} 0,4}.$$

Решение:

ОДЗ: x U (-0,5; 0,5)

Используем формулу перехода к новому основанию логарифма и выносим за скобку общий множитель.

$$\log_{0,4}(0,25-x^2) + \sin \pi x \cdot \log_{0,4}(0,25-x^2) = 0,$$

$$\log_{0,4}(0,25-x^2) \cdot (1+\sin \pi x) = 0,$$

$$\left[\begin{array}{l}\log_{0,4}(0,25-x^2)=0,\\ 1+\sin\pi x=0;\end{array}\right.$$ U $$\left[\begin{array}{l}0,25-x^2=1,\\ \sin\pi x=-1;\end{array}\right.$$ U $$x=-\frac{1}{2}+2k, k\in z$$

Выполним отбор корней, учитывая ОДЗ.

$$\begin{cases}-0,5\prec-\frac{1}{2}+2k\prec0,5,\\ k\in z;\end{cases}$$ U $$\begin{cases}0\prec k\prec\frac{1}{2},\\ k\in z;\end{cases}$$ U k I ? , следовательно,

уравнение не имеет корней.

Ответ: корней нет.

**Пример 2.** ***Решить уравнение:***

$$6\cdot3^{2\log_{x+1}(2x+3)}-13\cdot3^{\log_{(x+1)^2}(2x+3)^2}\cdot2^{\log_{(x+1)^2}(2x+3)^2}+6\cdot2^{2\log_{x+1}(2x+3)}=0.$$

Решение:

ОДЗ: $\begin{cases}x\succ-1\\ x\neq0\end{cases}$

Переходя к основанию ($x$ +1) и преобразуя логарифм степени, имеем

$$6\cdot3^{2\log_{x+1}(2x+3)}-13\cdot3^{\log_{x+1}(2x+3)}\cdot2^{\log_{x+1}(2x+3)}+6\cdot2^{2\log_{x+1}(2x+3)}=0$$

Разделим обе части уравнения на $2^{2\log_{x+1}(2x+3)}\neq0$

$$6\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{2\log_{x+1}(2x+3)}-13\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{\log_{x+1}(2x+3)}+6=0$$

Пусть $\left(\frac{3}{2}\right)^{\log_{x+1}(2x+3)}$ = t, тогда имеем

$6t^2-13t+6=0, t>0$

Решая квадратное уравнение, находим $t_1=\frac{3}{2}$, $t_2=\frac{2}{3}$

Возвращаясь к прежней переменной, получим совокупность

$$\left[\begin{array}{l}\left(\frac{3}{2}\right)^{\log_{x+1}(2x+3)}=\frac{3}{2},\\ \left(\frac{3}{2}\right)^{\log_{x+1}(2x+3)}=\frac{2}{3};\end{array}\right.$$ U $$\left[\begin{array}{l}x=-2,\\ x=-2,-\frac{1}{2}.\end{array}\right.$$

Учитывая ОДЗ, имеем $x=-\frac{1}{2}$.

Ответ: $x=-\frac{1}{2}$.

**Использование экстремальных свойств функции. Метод оценок.**

Обоснованием метода оценок является

**Теорема:** “Если на промежутке Х наибольшее значение функции $y = f(x)$ равно *А* и наименьшее значение функции *y = g(x)* тоже равно *А* , то уравнение $f(x)$ = *g(x)* равносильно системе уравнений $\begin{cases} f(x) = A, \\ g(x) = A \end{cases}$

Применение метода оценок предполагает нахождение наибольшего и наименьшего значений элементарных функций или их “композиций” на заданном множестве, а также использование некоторых “полезных” неравенств:

1. Неравенство Коши. Пусть $a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, \ldots a_k \geq 0$

Тогда имеет место $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{k} \geq \sqrt[k]{a_1 \cdot a_2 \ldots \cdot a_k}$, где $k \geq 2$

В частности, если $k$ =2, то неравенство Коши принимает вид:

$\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 \cdot a_2}$, где $a_1 \geq 0, a_2 \geq 0$ (1)

2. Неравенство для суммы двух взаимно обратных чисел $a + \frac{1}{a} \geq 2,$ где a > 0, (2)

которое также является следствием неравенства (1), если допустить, что $a_1 = a, a_2 = \frac{1}{a}$.

3. Неравенство для разности двух взаимообратных чисел $a + \frac{1}{a} \leq -2$, где a< 0. (3)

4. Неравенство $a^2 + в^2 \geq 2/ав/$. (4)

5. Неравенство для суммы синуса и косинуса одного и того же аргумента:

$|a \sin x + b \cos x| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$ (5)

**Пример 3.** ***Решить уравнение:***

$2^{1-|4x-1|} = tg\pi x + ctg\pi x$.

Решение:

О.Д.З.: х - любое, кроме $x = \frac{k}{2}, k \in Z.$

$-|4x-1| \leq 0,$

$1-|4x-1| \leq 1,$

$2^{1-|4x-1|} \leq 2.$

$tg\pi x + ctg\pi x = tg\pi x + \frac{1}{tg\pi x}$

$tg\pi x + \frac{1}{tg\pi x} \geq 2$ по свойству (2).

$$\begin{cases} 2^{1-|4x-1|} \leq 2, \\ tg\pi x + ctg\pi x \geq 2, \\ 2^{1-|4x-1|} = tg\pi x + ctg\pi x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{1-|4x-1|} = 2 \\ tg\pi x + ctg\pi x = 2. \end{cases}$$

Корень показательного уравнения $x = \frac{1}{4}$ является также корнем тригонометрического уравнения системы (проверяем подстановкой), следовательно, $x = \frac{1}{4}$ - решение системы и корень исходного уравнения.

Ответ: $\frac{1}{4}$.

**Использование свойства монотонности функций.**

Для решения комбинированных уравнений с использованием монотонности функций полезно знать следующую теорему:

**Теорема.** Если функция $y = f(x)$ - возрастающая на $[a, b]$, функция $y = g(x)$ - убывающая на $[a, b]$, то уравнение $f(x) = g(x)$ либо не имеет корней, либо имеет единственный корень на $[a, b]$.

**Пример 4.** ***Решить уравнение:***

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-7} + \left(\sqrt{x-5{,}3}\right)^2 + 13{,}3 = \frac{x^2-2x+1}{x-3} + x$$

Решение:

О.Д.З.: $x \ge 5{,}3$.

Выполнив преобразования, получим

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-7} + 8 = \frac{(x-1)^2}{x-3},$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-7} = \frac{x^2-2x+1-8x+24}{x-3},$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-7} = \frac{(x-5)^2}{x-3}.$$

Очевидно, что x = 7 - корень уравнения. Докажем, что других корней нет.

Функция $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-7}$ - убывает на $[5{,}3;+\infty)$.

$$g(x) = \frac{(x-5)^2}{x-3},$$

$$g'(x) = \frac{2(x-5)(x-3)-(x-5)^2}{(x-3)^2} = \frac{2x^2-16x+30-x^2+10x-25}{(x-3)^2} = \frac{x^2-6x+5}{(x-3)^2} = \frac{(x-1)(x-5)}{(x-3)^2}$$

Если $x \ge 5{,}3$, то $g'(x) \succ 0$, следовательно $g(x) = \frac{(x-5)^2}{x-3}$ возрастает на $[5{,}3;+\infty)$, тогда по теореме 2 уравнение $f(x) = g(x)$ имеет единственный корень.

Ответ: 7.

**Применение производной.**

Нахождение области значений элементарных функций, входящих в комбинированное уравнение, не всегда возможно осуществить, используя свойство ограниченности их области значений. В таких случаях бывает полезно применить производную для нахождения экстремумов функций.

**Пример 5.** ***Решить уравнение:***

$$x \cdot e^{-x} + e^{-x} + \frac{1}{2}x^2 - 1 = 0$$

Решение:

$$e^{-x}(1+x) = 1 - \frac{1}{2}x^2$$

Пусть $f(x) = e^{-x}(1+x)$; $\gamma(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2$.

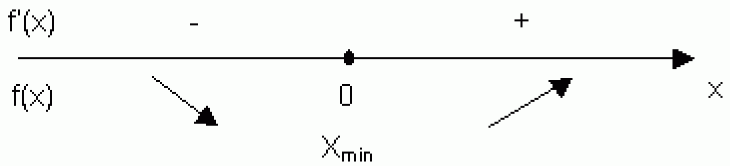
Найдем $E(f); E(\gamma)$- области значений этих функций.

$E(\gamma) = (-\infty;1]$, т.к. графиком функции $y = \gamma(x)$ является парабола с направленными вниз

ветвями и вершиной в точке (0;1).

$$f'(x) = -e^{-x}(1+x) + e^{-x} = -x \cdot e^{-x}$$

x = 0 - критическая точка функции $y = f(x)$




$x_{min} = 0$
$f(0) = 1$
$E(f) = [1;+\infty)$

$f(x) \geq 1;$
$\gamma(x) \leq 1;$

равенство $f(x) = \gamma(x)$ возможно, если

$$\begin{cases} f(x) = 1, \\ \gamma(x) = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{-x}(1+x) = 1, \\ 1 - \frac{1}{2}x^2 = 1. \end{cases}$$

Корень второго уравнения *x* = 0 подставим в первое уравнение системы, получим верное числовое равенство, следовательно *x* = 0 - решение системы и корень исходного уравнения.

Ответ: 0.

Решение задач из дидактического материала №109, №114, 116, №121, №158, №161

**Урок 2.**

**Пример 1.** ***Решить уравнение*** $2\sqrt{x} = x - 3$.

Решение. 1 способ. Возведя обе части уравнения в квадрат, получим уравнение, являющееся следствием исходного:

$$2\sqrt{x} = x - 3 \Rightarrow 4x = (x-3)^2 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 9 = 0$$

Корни последнего $x$ = 1 и $x$ = 9. Так как обе части уравнения возводились в чётную степень, то необходимо сделать проверку. Подставляя $x$ = 1 в исходное уравнение, получим равенство 2 = 1-3, которое является ложным. Значит, $x$ = 1 не является корнем (является посторонним корнем). При подстановке $x$ = 9 получим верное равенство $2\sqrt{9} = 9 - 2$

Ответ: 9.

2 способ (переход к равносильной системе). Так как $2\sqrt{x}$ по определению число неотрицательное, то $x$ - 3 также должно быть неотрицательным. Если выражения А и В неотрицательны, то равенства А = В и $A^2 = B^2$ равносильны. Значит, уравнение

$$2\sqrt{x} = x - 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = (x-3)^2 \\ x - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 10x + 9 = 0 \\ x - 3 \geq 0 \end{cases}$$

Решениями первого уравнения системы являются числа 1 и 9, из которых условию $x - 3 \geq 0$ удовлетворяет только x=9.

Ответ: 9.

*3 способ* (замена переменной). Положим $\sqrt{x} = t, t \geq 0$ Получим уравнение $2t = t^2 - 3 \Leftrightarrow t^2 - 2t - 3 = 0$

Его корни $t$=-1 и $t = 3$. Первый корень не удовлетворяет условию $t$ > 0. Решением уравнения $\sqrt{x} = 3$будет число $x$ = 9. Оно является решением исходного уравнения.

Ответ: 9.

Отметим, что ОДЗ уравнения примера 1 есть промежуток $[0;+\infty)$, так как $\sqrt{x}$ определён для $x \geq 0$, а выражение $x$ - 3 определено для всех $x$. Оба числа $x$ = 1 и $x$ = 9 принадлежат ОДЗ, но $x$ = 1 корнем не является. Конечно, и этом примере можно было потребовать, чтобы выражение $x$ - 3 было неотрицательным, и назвать ОДЗ уравнения промежуток $[3;+\infty)$. Однако в более сложных примерах такой анализ может вызвать затруднения.

**Пример 2.** ***Решить уравнение*** $\sqrt{x} + \sqrt{x+3} = \sqrt{10x-1}$

Решение. ОДЗ данного уравнения определяется системой неравенств

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x + 3 \geq 0, \Leftrightarrow x \geq 0{,}1 \\ 10x - 1 \geq 0 \end{cases}$$

Так как на ОДЗ обе части уравнения неотрицательны, то для $x \geq 0{,}1$ данное уравнение равносильно уравнению

$$x + 2\sqrt{x}\sqrt{x+3} + x + 3 = 10x - 1 \Leftrightarrow \sqrt{x}\sqrt{x+3} = 4x - 2$$

Для решения последнего уравнения снова возведём обе его части в квадрат

$$\sqrt{x}\sqrt{x+3}=4x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+3)=4(2x-1)^2 \\ x \ge 0{,}1 \\ 4x-2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15x^2-19x+4=0 \\ x \ge 0{,}5 \end{cases}$$

Уравнение $15x^2-19x+4=0$ имеет корни $x$ = 1 и $x$ = 4/15, из которых второй не удовлетворяет условию $x \ge 0{,}5$. Значит корнем исходного уравнения является $x$ = 1.

Ответ: 1.

Замечание. Отметим, что $x$ = 4/15 принадлежит ОДЗ уравнения, но не удовлетворяет условию $4x-2 \ge 0$, возникшему при втором возведении обеих частей уравнения в квадрат.

Таким образом, при решении иррациональных уравнений необходимо четко отслеживать знаки выражений, возводимых в четную степень (или пользоваться проверкой корней).

Отметим также, что метод равносильных преобразований очень эффективен, когда проверка корней вызывает трудности (например, корни иррациональные числа).

**Пример 3.** ***Решить уравнение*** $\sqrt{3+x}+2=\sqrt{3-x}$

$$\sqrt{3+x}+2=\sqrt{3-x} \Leftrightarrow 3+x+4\sqrt{3+x}+4=3-x \Leftrightarrow 2\sqrt{3+x}=-2-x$$

Решение. $$\Leftrightarrow \begin{cases} 12+4x=(-2-x)^2 \\ -2-x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=8 \\ x \le -2 \end{cases} \Leftrightarrow x=-2\sqrt{2}$$

Ответ: $-2\sqrt{2}$

**Пример 4.** ***Решить уравнение*** $\sqrt{5+x-4\sqrt{x+1}}+\sqrt{10+x-6\sqrt{x+1}}=1$

Решение. Заметим, что подкоренное выражения представляют собой полные квадраты. Действительно:

$5+x-4\sqrt{x+1}=(x+1)-4\sqrt{x+1}+4=(\sqrt{x+1}-2)^2$

и, аналогично $10+x-6\sqrt{x+1}=(\sqrt{x+1}-3)^2$

Пользуясь равенством $\sqrt{a^2}=|a|$ получим:

$\left|\sqrt{x+1}-2\right|+\left|\sqrt{x+1}-3\right|=1$

Положим $y=\sqrt{x+1}, y \ge 0$

Раскрывая модули, получим, что уравнение равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0 \le y < 2\\ 2-y+3-y=1\end{cases}\\ \begin{cases}2 \le y \le 3\\ y-2+3-y=1\end{cases} \Leftrightarrow 2 \le y \le 3\\ \begin{cases}y > 3\\ y-2+y-3=1\end{cases}\end{array}\right.$$

Возвращаясь к переменной *x*, будем иметь $2 \le \sqrt{x+1} \le 3$. Так как все члены этих неравенств неотрицательны, то после возведения в квадрат получим $4 \le x+1 \le 9$, откуда $3 \le x \le 8$

Ответ: [3; 8]

Замечание. Представление подкоренных выражений в виде полного квадрата часто вызывает затруднение. Если сделать замену $y = \sqrt{x+1}$ с самого начала, то получим $x = y^2 - 1$ и, значит, исходное уравнение примет вид

$$\sqrt{y^2+4-4y} + \sqrt{y^2+9-6y} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{(y-2)^2} + \sqrt{(y-3)^2} = 1$$

**Пример 5.** ***Решить уравнение*** $\sqrt[3]{x-2} + \sqrt{x+1} = 3$

Решение. (метол сведения иррационального уравнения с помощью замены к системе рациональных уравнений), Положим $u = \sqrt[3]{x-2}$, $v = \sqrt{x+1}$. Тогда $u+v=3$. Найдем еще одно уравнение, связывающее *u* и $v$. Так как $u^3 = x-2, v^2 = x+1,$ то $v^2 - u^2 = 3$. Итак, в новых переменных имеем

$$\begin{cases}u+v=3\\ v^2-u^3=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}v=3-u\\ u^3-u^2+6u-6=0\end{cases}$$

Второе уравнение системы запишем в виде $u^2(u-1)+6(u-1)=0$. Отсюда получим *u*=1 и, значит, *x*=3

Ответ: 3.

Решение задач из задачника Гинев Ю.Н. «Математика» подготовительный факультет МИСиС № 6.3.23, №6.3.24, №6.3.26, №6.3.27.

**Урок 3.**

Решение задач из задачника Гинев Ю.Н. «Математика» подготовительный факультет МИСиС № 3.3.22, №3.3.28, №3.3.29, №3.3.30.

**Урок 4.**

Творческий проект “Решение систем уравнений и неравенств”

Решение задач из задачника Гинев Ю.Н. «Математика» подготовительный факультет МИСиС № 1.3.30, №1.4.4, №1.4.5, №1.4.8, №1.4.11.

## Список литературы для учащихся.


1. Контрольно-измерительные материалы ЕГЭ 2021 г.
2. ЕГЭ 2021. Математика. Федеральный банк экзаменационных материалов. Автор составитель Денищева Л.О., Рязановский А.Р., Семенов П.В., Сергеев И.Н., 2007 г.
3. ЕГЭ репетитор. Математика эффективная методика. Лаппо Л.Д., Морозов А.В., Попов М.А. 2021 г.
4. ЕГЭ 2008 математика, сборник заданий. Кочагин В.В., Кочагина М.Н. 2007 г.
5. Математика. Реальные варианты ЕГЭ 2021. Кочагин В.В., Бойченко Е.М., Глазков Ю.А. 2021 г.
6. Математика. Интенсивный курс подготовки к ЕГЭ. Колесникова С.И. 2006 г.
7. ЕГЭ математика. Контрольно-измерительные материалы 2020-2021. Денищева Л.О. 2021 г.
8. Экзаменационные материалы для подготовки к ЕГЭ. Математика. Составитель Клово А.Г.

9. ЕГЭ математика, раздаточный материал тренировочных тестов Гусева К.С. 2021 г.

10. Тематические тесты. Математика ЕГЭ 2021. Лысенко Ф.Ф., Калашников В.Ю., Неймарк А.Б., Кудрявцев О.Е. и др.

11. Учебно-тренировочные материалы для подготовки к единому государственному экзамену. Математика. Составители: Денищева Л.О., Глазков Ю.А. и др. – М.: Интеллект-Центр, 2021.

12. Учебно-тренировочные материалы для подготовки к единому государственному экзамену. Математика. Составители: Денищева Л.О., Глазков Ю.А. и др. – М.: Интеллект-Центр, 2021.

13. Учебно-тренировочные материалы для подготовки к единому государственному экзамену. Математика. Составители: Денищева Л.О., Глазков Ю.А. и др. – М.: Интеллект-Центр, 2021.

14. Учебно-тренировочные материалы для подготовки к единому государственному экзамену. Математика. Составители: Денищева Л.О., Глазков Ю.А. и др. – М.: Интеллект-Центр, 2021.

## Список литературы для учителя.

1. ГиневЮ.Н. Задачник «Математика» подготовительный факультет МИСиС.

2. Денищева, Л. О., Бойченко, Е. М., Глазков, Ю. А. и др. Готовимся к единому государственному экзамену. Математика. - М.:Дрофа, 2003.-120 с.

3. Егерев, В. К. и др. Сборник задач по математике для поступающих во втузы / под ред. М. И. Сканави. - М.: Высшая школа1988

4. Кальней С. Г., Олейник Т.А., Прокофьев А. А. Сборник задач по математике для подготовительных курсов 2015 Миэт

5. Лунгу К.Н. Тесты по математике для абитуриентов. – М.: Айрис-пресс, 2010.

6. Сборник заданий для проведения письменного экзамена по алгебре за курс основной школы. – М.: Дрофа, 2005.

7. Муравин Г.К. «Алгебра и начала анализа 10кл».
8. Ткачук, В. В. Математика - абитуриенту: в 2 т. Т. I. - М.:МЦНМО,ТЕИС, 1997.
9. Шарыгин, И. Ф. Решение задач: факультативный курс по математике. 10 класс. -М.: Просвещение, 1989.